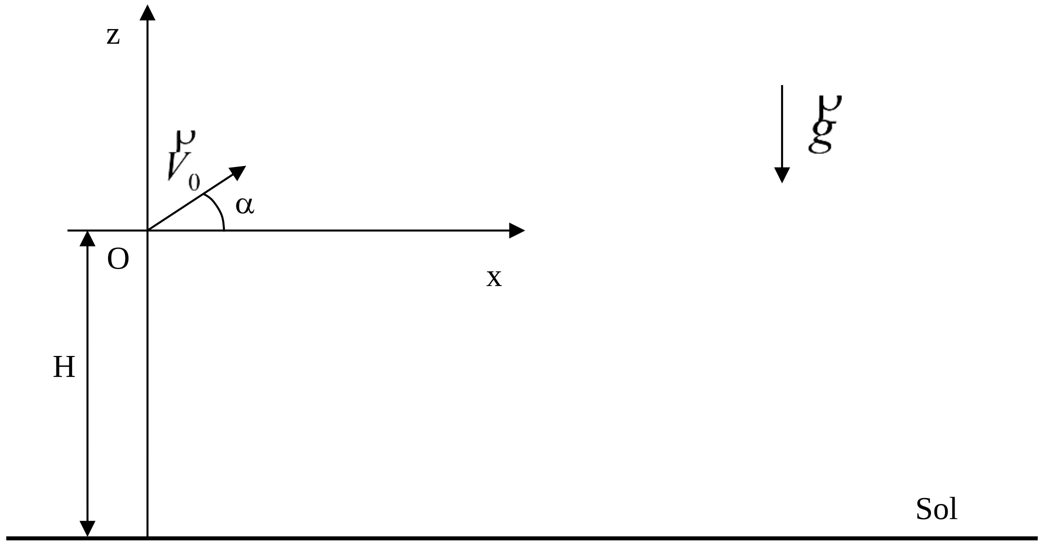
Amérique du sud 2004 **Exercice 1 : MOUVEMENTS PLANS** **(4 points)**

Cet exercice comporte 8 affirmations.
À chaque affirmation, vous répondrez par VRAI ou par FAUX en justifiant votre choix à l'aide de **démonstrations de cours** et de définitions, de calculs, de schémas ou d'analyses dimensionnelles. Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

***1.** On considère un projectile évoluant dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme.*
Le projectile de masse m est lancé à la date t = 0 s d'un point O, origine du repère (O, x, z). Le vecteur vitesse initial $\vec{V}_0$ fait un angle α quelconque avec l'horizontale. Le mouvement s'effectue dans le plan vertical contenant les axes Ox et Oz , tel que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est parallèle à Oz. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige toute résistance de l'air.



1.1. AFFIRMATION : le vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$ du centre d'inertie G du projectile ne dépend pas des conditions initiales.

1.2. AFFIRMATION : le projeté du centre d'inertie G du projectile sur l'axe vertical Oz est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

1.3. AFFIRMATION : la trajectoire du centre d'inertie G du projectile est parabolique quelque soit la valeur de α.

1.4. AFFIRMATION : dans le cas où le projectile est lancé d'une hauteur H au dessus du sol avec une vitesse $\vec{V}_0$ horizontale, l'abscisse de son point de chute est $x = V_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$

On rappelle qu'à t = 0 s, le projectile est en O, origine du repère.

CORRECTION

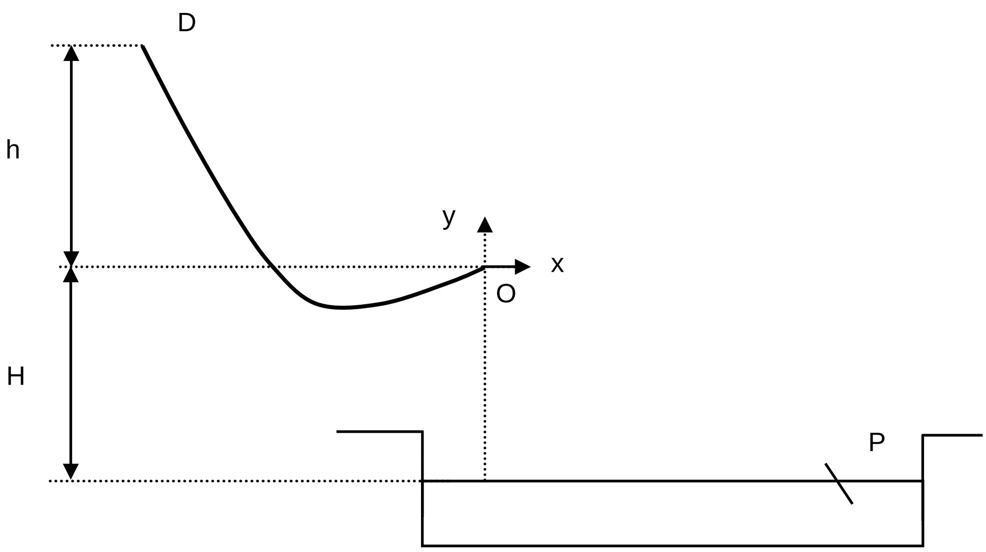
Antilles Guyane 2009 EXERCICE II. UN TOBOGGAN DE PLAGE

Un enfant glisse le long d'un toboggan de plage dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Pour l'exercice, l'enfant sera assimilé à un point matériel *G* et on négligera tout type de frottement ainsi que toutes les actions dues à l'air.

Un toboggan de plage est constitué par :

- une piste *DO* qui permet à un enfant partant de *D* **sans vitesse initiale** d'atteindre le point *O* avec un vecteur vitesse $\vec{V_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale ;

- une piscine de réception : la surface de l'eau se trouve à une distance *H* au dessous de *O*.



Données :

- Masse de l'enfant : m = 35 kg ;
- Intensité de la pesanteur : g = 10 m.s^{-2} ;
- Dénivellation h = 5,0 m ;
- Hauteur H = 0,50 m ;
- Angle α = 30° ;

2. Étude de la chute de l'enfant dans l'eau

En O, origine du mouvement dans cette partie, on prendra $\boldsymbol{v_0}$ **= 5,0 m.s^{-1}**.

2.1. Énoncer la deuxième loi de Newton.

2.2. Appliquer la deuxième loi de Newton à l'enfant une fois qu'il a quitté le point O.

2.3. Déterminer l'expression des composantes $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération dans le repère *Oxy*.

2.4. Déterminer l’expression des composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse dans le repère *Oxy*.

2.5. Déterminer l’expression des composantes $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position dans le repère *Oxy*.

2.6. Montrer que l’expression de la trajectoire de l’enfant notée $y(x)$ a pour expression :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 . \cos^2 \alpha} + x.\tan\alpha$$

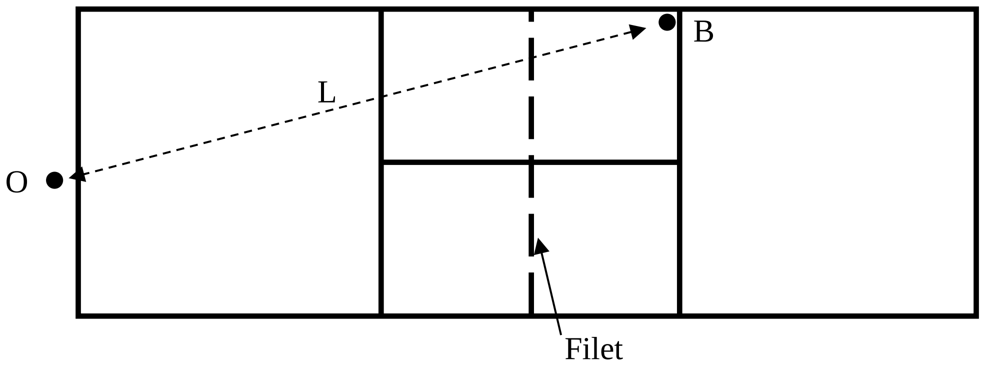
2.7. En déduire la valeur de l’abscisse x_P du point d’impact P de l’enfant dans l’eau.

CORRECTION

EXERCICE II. UN SERVICE AU TENNIS **Novembre 2009 - Amérique du Sud**

Un terrain de tennis est un rectangle de longueur 23,8 m et de largeur 8,23 m. Il est séparé en deux dans le sens de la largeur par un filet dont la hauteur est 0,920 m.

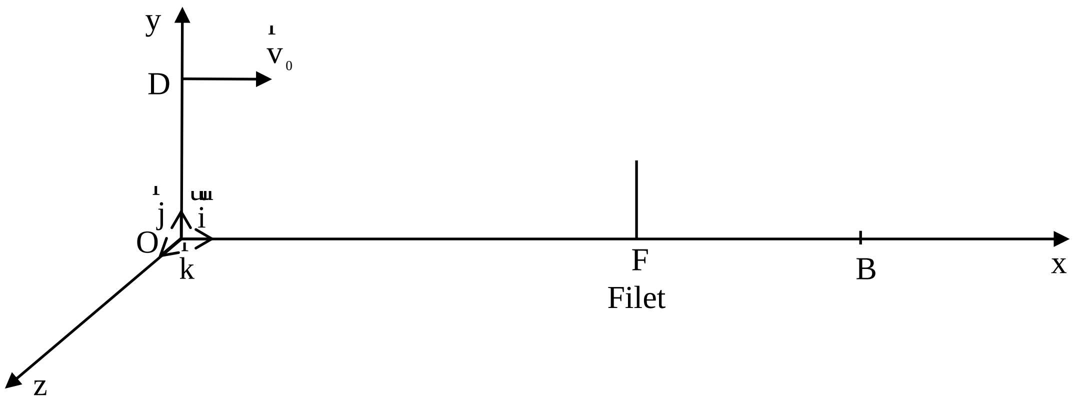
Lorsqu'un joueur effectue un service, il doit envoyer la balle dans une zone comprise entre le filet et une ligne située à 6,40 m du filet.
On étudie un service du joueur placé au point O.



Ce joueur souhaite que la balle frappe le sol en B tel que OB = L = 18,7 m.

Pour cela, il lance la balle verticalement et la frappe avec sa raquette en un point D situé sur la verticale de O à la hauteur H = 2,20 m.
La balle part alors de D avec une vitesse de valeur v_0 = 126 km.h^{-1}, horizontale comme le montre le schéma ci-dessous.
La balle de masse m = 58,0 g sera considérée comme ponctuelle et on considérera que l'action de l'air est négligeable.

L'étude du mouvement sera faite dans le référentiel terrestre, galiléen, dans lequel on choisit un repère Oxyz comme l'indique le schéma ci-dessous :



Remarque : vous n'avez pas encore vu en math la géométrie dans l'espace… donc avec 3 coordonnées x, y et z.
Cependant cela ne change pas grand-chose : on rajoute juste une 3eme coordonnée pour les vecteur position, vitesse et accélération (par ailleurs cette 3eme coordonnées sera toujours nulle car le mouvement se fait dans le plan (Oxy) donc on peut juste 'ignorer les différentes coordonnées selon z)

1. Équations horaires paramétriques et trajectoire.

1.1. Faire le bilan des forces appliquées à la balle pendant son mouvement entre D et B.
En indiquer les caractéristiques (direction, sens, grandeur) et l'expression.

1.2. Établir l'expression du vecteur accélération de la balle au cours de son mouvement.

1.3. Montrer que les équations horaires paramétriques du mouvement de la balle sont :

$x(t) = v_0\, t$ $\qquad y(t) = \dfrac{-gt^2}{2} + H$ $\qquad z(t) = 0$

1.5. Déduire de la réponse à la question 1.3. l'équation littérale de la trajectoire de la balle dans le plan xOy.

2. Qualité du service.

On prendra g = 9,81 m.s⁻².

2.1. Sachant que la distance OF = 12,2 m, la balle, supposée ponctuelle, passe-t-elle au-dessus du filet ?

2.2. Montrer que le service sera considéré comme mauvais, c'est-à-dire que la balle frappera le sol en un point B' tel que OB' soit supérieur à OB.

2.3. En réalité, la balle tombe en B. Quel est le paramètre, non pris en compte dans ce problème, qui peut expliquer cette différence ?

CORRECTION

Amérique du Sud 2004 Exercice 1 Mouvements plans (4pts)

1.1. Le projectile est soumis uniquement à son poids.
D'après la deuxième loi de Newton: $\vec{P} = m.\vec{a_G}$
soit $m.\vec{g} = m.\vec{a_G}$
donc $\vec{g} = \vec{a_G}$
Ainsi l'affirmation est **vraie**, le vecteur accélération $\vec{a_G}$ du centre d'inertie du projectile ne dépend pas des conditions initiales.
1.2. D'après le 1.1. on a $\vec{g} = \vec{a_G}$
Par projection suivant l'axe vertical Oz, $a_{GZ} = -g$
Or $a_{GZ} = \frac{dv_Z}{dt}$ donc $v_{GZ} = -g.t + V_{0z}$ soit $v_{GZ} = -g.t + V_0.\sin\alpha$
v_{GZ} varie au cours du temps, donc le mouvement du projeté de G suivant l'axe vertical Oz n'est pas uniforme.
Affirmation fausse.

1.3. Il faut établir l'équation de la trajectoire de G.

$$\vec{a_G}\begin{cases} a_{xG} = 0 \\ a_{zG} = -g \end{cases} \qquad \vec{v_G}\begin{cases} v_{xG} = v_{0x} = V_0.\cos\alpha \\ v_{ZG} = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{cases} \qquad \overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = (V_0.\cos\alpha).t \\ z_G = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (V_0.\sin\alpha).t \end{cases}$$

on peut écrire que $t = \frac{x_G}{V_0.\cos\alpha}$, on remplace cette expression dans l'expression de z_G

$$z_G = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x_G}{V_0.\cos\alpha}\right)^2 + (V_0.\sin\alpha).\frac{x_G}{V_0.\cos\alpha}$$

$$z_G = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x_G}{V_0.\cos\alpha}\right)^2 + x_G.\tan\alpha$$

Cette équation de trajectoire correspond effectivement a une parabole **sauf si $\alpha = 90°$**
La proposition est donc **fausse**.

Si $\alpha = 90°$

$$\vec{a_G}\begin{cases} a_{xG} = 0 \\ a_{zG} = -g \end{cases} \qquad \vec{v_G}\begin{cases} v_{xG} = v_{0x} = V_0.\cos\alpha \mathbf{= 0} \\ v_{ZG} = -g.t + V_0.\sin\alpha \\ v_{ZG} = -g.t + V_0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = 0 \\ z_G = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.t \end{cases}$$

Alors la trajectoire serait un segment de droite verticale.

1.4. On reprend les coordonnées du vecteur position établies en 1.3. avec $\alpha = 0$ (vecteur vitesse initiale horizontal)

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = (V_0.\cos\alpha).t \\ z_G = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (V_0.\sin\alpha).t \end{cases} \qquad \text{soit } \overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = V_0.t \\ z_G = -\frac{1}{2}.g.t^2 \end{cases}$$

Lorsque $z_G = -H$ alors le projectile touche le sol, ceci a lieu à l'instant noté t_S

$-H = -\frac{1}{2}.g.t_S^2$

soit $t_S^2 = \frac{2H}{g}$ donc $t_S = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

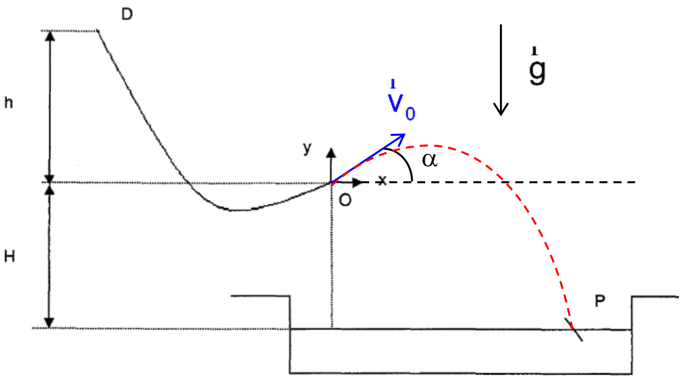
On calcule alors l'abscisse x_G à cet instant: $x_G = V_0.t_S$

$x_G = V_0.\sqrt{\frac{2H}{g}}$

L'affirmation est vraie.

Retour à l'exercice

2. Étude de la chute de l'enfant dans l'eau



2.1. Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ appliquée à un système de masse *m* est égale à la masse du système multipliée par le vecteur accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

2.2. L'enfant de masse *m* est modélisé par un point matériel G, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'enfant n'est soumis qu'à son poids : ainsi la deuxième loi de Newton appliquée à l'enfant une fois qu'il a quitté le point O donne : $\vec{P} = m.\vec{a}$

$$\Leftrightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow .\vec{g} = \vec{a}$$

2.3. Dans le repère (Oxy) choisi : $\boxed{\vec{a}\,(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}}$

2.4. Sachant que : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ on a : $\vec{a}\,(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = -g = \dfrac{dv_y}{dt} \end{cases}$

par intégration $\vec{v}\,(t)\begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_y(t) = -g.t + Cte_2 \end{cases}$ or $\vec{v}_0\begin{cases} v_x(0) = Cte_1 = v_0.\cos\alpha \\ v_y(0) = Cte_2 = v_0.\sin\alpha \end{cases}$

donc $\boxed{\vec{v}\,(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}}$

2.5. Sachant que : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ on a : $\vec{v}\,(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0.\cos\alpha = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$

par intégration : $\overrightarrow{OG}\,(t)\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha.t + Cte_1' \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + Cte_2' \end{cases}$ or $\overrightarrow{OG}\,(0)\begin{cases} x(0) = Cte_1' = 0 \\ y(0) = Cte_2' = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{\overrightarrow{OG}\,(t)\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha.t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t \end{cases}}$

2.6. On isole le temps t dans x(t) = $v_0.\cos\alpha.t$ et on reporte t dans y(t) pour avoir l'équation de la trajectoire y(x) :

$t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha} \Rightarrow \quad y(x) = -\dfrac{1}{2}.g.\left(\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + v_0.\sin\alpha.\dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x.\tan\alpha}$$

2.7. Il faut résoudre l'équation : $y(x_P) = -H$ car pour $x = x_P$, $y = -H$:

donc : $-\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x_P^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x_P.\tan\alpha = -H$

Calculons les termes devant x_P^2 et x_P :

$$-\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha} = -\frac{1}{2}\times\frac{10}{5{,}0^2\times\cos^2(30)} = -0{,}27\ m^{-1}$$

$\tan\alpha = \tan(30) = 0{,}58$

Il faut résoudre l'équation, avec $H = 0{,}50$ m : $-0{,}27.x_P^2 + 0{,}58.x_P = -0{,}50$

Soit l'équation du second degré : $-0{,}27.x_P^2 + 0{,}58.x_P + 0{,}50 = 0$

$\Delta = (0{,}58)^2 - 4 \times (-0{,}27) \times 0{,}50 = 0{,}88$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0{,}88} = 0{,}94$

les solutions pour x_P sont :

$x_P = \dfrac{(-0{,}58 + 0{,}94)}{2\times(-0{,}27)} = -0{,}54$ m et $x_P = \dfrac{(-0{,}58 - 0{,}94)}{2\times(-0{,}27)} = 2{,}8$ m

Or x_P est positif , x_P = **2,8 m**

Calculs effectués avec les valeurs non arrondies de tan(30) et de $-\dfrac{1}{2}.\dfrac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}$

Retour à l'exercice

EXERCICE II. UN SERVICE AU TENNIS (5,5 points)
Novembre 2009 - Amérique du Sud **http://labolycee.org**

1. Équations horaires paramétriques et trajectoire.

1.1. La balle, dans le référentiel terrestre galiléen, est soumise uniquement à son poids $\vec{P}$. En effet d'après l'énoncé « l'action de l'air est négligeable » : on ne tient pas compte de la poussée d'Archimède et de la force de frottement de l'air sur la balle. Et la raquette n'agit plus pendant le mouvement de la balle.
Les caractéristique du poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ sont :

- direction : verticale
- sens : vers le bas
- expression : P = m.g
- valeur (= grandeur) : $P = 58{,}0\times10^{-3}\times9{,}81 = 0{,}569$ N.

1.2. La seconde loi de Newton, appliquée à la balle donne : $\vec{P} = m.\vec{a}$ soit $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ d'où : $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

Les coordonnées du vecteur accélération dans le repère Oxyz sont : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$

1.3. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$ donc $\vec{a}\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$ ainsi $\vec{v}(t)\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g.t + C_2 \\ v_z = C_{1_3} \end{cases}$ C_1, C_2, C_3 sont des constantes définies par les conditions initiales.

Initialement $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ avec $\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0_y} = 0 \\ v_{0_z} = 0 \end{cases}$ donc $\vec{v}(0)\begin{cases} v_x = C_1 = v_0 \\ v_y = -0 + C_2 = 0 \\ v_z = C_3 = 0 \end{cases}$ d'où $\vec{v}(t)\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -g.t \\ v_z = 0 \end{cases}$

Et $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ donc $\vec{v}(t)\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -g.t \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$ ainsi $\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x = v_0.t + C'_1 \\ y = -\frac{g.t^2}{2} + C'_2 \\ v_z = C'_3 \end{cases}$ C'_1, C'_2, C'_3 sont des constantes

Initialement $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OD} = H.\vec{j}$ donc $\overrightarrow{OM}(0)\begin{cases} x = 0 + C'_1 = 0 \\ y = -0 + C'_2 = H \\ z = C'_3 = 0 \end{cases}$ d'où $\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x = v_0.t \\ y = \frac{-g.t^2}{2} + H \\ z = 0 \end{cases}$

On retrouve bien les expressions demandées :

$x(t) = v_0.t$ (1) $y(t) = \frac{-g.t^2}{2} + H$ (2) $z(t) = 0$

1.5. On isole le temps « t » de (1) que l'on reporte dans (2) :

(1) $t = \frac{x}{v_0}$ donc dans (2) : $y(x) = \frac{-g}{2}.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + H$

finalement : $\boxed{y(x) = \frac{-g}{2v_0^2}.x^2 + H}$ équation d'une parabole de concavité tournée vers le bas.

2. Qualité du service.

2.1. La balle passe au-dessus du filet si pour x = OF= 12,2 m , y(x) > 0,920 m.

Calculons, avec l'expression du 1.5. : $y(x=12{,}2) = \frac{-9{,}81}{2\times\left(\frac{126}{3{,}6}\right)^2}\times(12{,}2)^2 + 2{,}20 =$ **1,60 m > 0,920 m**

avec $v_0 = 126\ \text{km.h}^{-1} = (126/3{,}6)\ \text{m.s}^{-1}$

Donc la **balle passe au-dessus du filet**.

2.2. La balle frappe le sol en un point B' ($x_{B'}$; $y_{B'} = 0$; $z_{B'} = 0$).

Le service est « mauvais » si $x_{B'} > OB$ avec OB = L = 18,7 m.

Avec l'expression du 1.5., déterminons $x_{B'}$: $y(x_{B'}) = 0$ soit $\frac{-g}{2}.\left(\frac{x_{B'}}{v_0}\right)^2 + H = 0$

Isolons $x_{B'}$: $x_{B'}^2 = \frac{2v_0^2 H}{g}$

donc $\boxed{x_{B'} = \sqrt{\frac{2v_0^2.H}{g}}}$ en ne gardant que la solution positive.

$$x_{B'} = \sqrt{\frac{2\times\left(\frac{126}{3,6}\right)^2\times 2,20}{9,81}}$$ = **23,4 m.**

Donc $x_{B'} > 18,7$ m, le service est effectivement « mauvais ».

2.3. En réalité, la balle tombe en B. Le paramètre, non pris en compte dans ce problème, qui peut expliquer cette différence est la **force de frottement de l'air sur la balle**.
Remarque hors programme de terminale : Au tennis, l'effet donné à la balle est essentiel. La balle est mise en rotation, et l'effet Magnus modifie la trajectoire de façon sensible.